結合的H-空間のTypeについて (複体の局所化)

AUTHOR(S):

菅原, 民生

CITATION:

菅原, 民生. 結合的H-空間のTypeについて (複体の局所化). 数理解析研究所講究録 1972, 133: 53-58

ISSUE DATE:

1972-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/106600

数理解析研究所講究録
133巻 1972年 53-58

結合的H-空間の type について

九大理　菅原民生

§1. H-空間の type

ここで扱うH-空間はすべて 単連結な有限CW複体と同じ homotopy 型をもつ 結合的H-空間とする。

Hopf の定理によって このようなH-空間 X は

$$H^*(X, Q) = \Lambda_Q(x_1, \cdots, x_\ell), \quad \deg x_i = 2n_i - 1$$

となる。このときの ℓ を X の rank, $(2n_1-1, \cdots, 2n_\ell-1)$ を X の type という。

問題は、上のようなH-空間の type はすべて compact な Lie 群の type として得られるものだけかということである。

これについて Ewing [2] は Clark の結果 [1] を拡張することによって、かなり進展させた。それを紹介する。

簡単のため、次のように考察を制限する。二つのH-空間 X_1, X_2 の type を A_1, A_2 とするとき、$X_1 \times X_2$ の type は $A_1 \cup A_2$ となる。type A が $A_1 \cup A_2$ と分解されないとき simple という。ここでは simple な type のみ扱う。

定理A.

rank l の H-空間の type は

$1 \leq l \leq 4$ のとき Lie群の type のみ.

$l=5$ のとき Lie群の type 又は

$$\{(3,5,7,11,15),\ (3,7,11,11,15),\ (3,5,5,7,9)\}$$

$l=6$ のとき. Lie群の type 又は

$$\left\{\begin{array}{l}(3,5,7,11,15,19),\ (3,7,7,11,15,19) \\ (3,7,7,9,11,15),\ (3,7,7,11,11,15) \\ (3,7,9,11,11,15)\end{array}\right\}$$

定理B.

各entryは高々1つとし, 最高のentry $2n-1$ は $2n-1>59$ とする。このようは H-空間の type は

(i) n が奇数のとき $\{2k-1\,;\ 2\leq k\leq n\}$ はすべて entry に入る

(ii) n が偶数のとき

(a) $n \neq 3^k$ $(k\geq 3)$ のとき

$$\{4k-1\,;\ 1\leq k\leq \tfrac{n}{2}\}$$ はすべて entry に入る.

(b) $n = 3^k$ $(k\geq 3)$ のとき

$$\{4k-1\,;\ 1\leq k\leq \tfrac{n}{2},\ k\neq \tfrac{n}{2}-1\}$$ はすべて entry に入る

§2. $\mathcal{A}_p$の多項式環への作用

BをZ_p上の多項式環で mod p Steenrod algebra $\mathcal{A}_p$が作用しているとする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 1

$\{x_1, \cdots, x_k\}$を Bの生成元全体の部分集合, $\deg x_i = 2m_i$ 各$m_i \not\equiv 0 \pmod p$とする. $m = (m_1, \cdots, m_k)$を最大公約数とする。このとき Bの生成元の集合$\{y_1, \cdots, y_k\}$で, $\deg y_i = 2n_i$, $n_i \equiv 1-p \pmod m$となるものが存在する

証明には次の代数学的な補題を用いる.

補題

RをNoether環, Aをそのidealでr個のbaseを持つとする. Aの任意のassociated素ideal Pは高々rのheightを持つ。

定理1の証明

各m_iはpで割り切れないから$m_i = a_i + b_i p$, $1 \leq a_i < p$ $0 \leq b_i$とする。Adem relationによって

$$a_i x_i^p = a_i \mathcal{P}^{m_i} x_i = \mathcal{P}^1 \mathcal{P}^{m_i - 1} x_i$$

をうる。

$$C = Z_p[x_1, \cdots x_k]$$

$$I = \langle \{x_1, \cdots, x_k\}^c \rangle$$

をそれぞれ, $x_1, \cdots, x_k$ で生成される B の部分環, $x_1, \cdots, x_k$ 以外で生成される B の ideal とする。任意の生成元 y について $\mathcal{P}^1 y \in I$ とすると $x_i^p \in I$ となり矛盾であるから ある生成元 y について $\mathcal{P}^1 y \notin I$。このとき $\mathcal{P}^1 y = c + s$; $c \in C$, $s \in I$ と分解され, $\deg y + 2(p-1) = \alpha \cdot 2m$ すなわち

$$\frac{\deg y}{2} \equiv 1-p \pmod{m}$$

をうる。$\{y_1, \cdots, y_d\}$ を $\frac{\deg y_i}{2} \equiv 1-p \pmod{m}$ なる y_i 全体とする。$\mathcal{P}^1 y_i = c_i + s_i$; $c_i \in C$, $s_i \in I$ と分解しておく。$y \notin \{y_1, \cdots, y_d\}$ ならば $\mathcal{P}^1 y \in I$ に注意しよう。

$a_i x_i^p = \mathcal{P}^1 \mathcal{P}^{m_i-1} x_i$ だから

$$\frac{1}{a_i} \mathcal{P}^{m_i-1} x_i = a_{i1} y_1 + \cdots + a_{id} y_d + T_i$$

$$a_{ij} \in C, \quad T_i \in I$$

と表わすことができる。これに $\mathcal{P}^1$ をほどこすと

$$x_i^p = a_{i1} c_1 + \cdots + a_{id} c_d, \qquad i = 1, \cdots, k$$

をうる。

$$J = \langle c_1, \cdots, c_d \rangle$$

を $c_1, \cdots, c_d$ で生成される C の ideal とすると $J \ni x_i^p$ だから. J の根基 $\mathrm{rad}\, J$ は各 x_i を含む. よって

$$\mathrm{rad}\, J = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$$

このheightはkだから補題によって$k \leq d$, すなわち$y_1, \cdots, y_k$が存在する.

§3 Ewingの定理とその系

Xをp-torsionを持たないH-空間とする. BXをXの分類空間とするとBorelの定理によって

$$H^*(BX. Z_p) = Z_p[y_1 \cdots y_l], \quad \deg y_i = 2n_i$$

となる。$A = (2n_1, \cdots, 2n_l)$とする。

定理2

$A \ni 2m_1, \cdots, 2m_d$; $m = (m_1, \cdots, m_d)$とするとき$(k, m) = 1$なる各kについて

$$2n_1, \cdots, 2n_d \in A. \quad n_i \equiv k+1 \pmod m$$

が成り立つ。

証明 $-k + tm = p$となる素数pが無数に存在する。(Dirichlet)。pは十分大きく, 従って各$m_i \not\equiv 0 \pmod p$で, Xはp-torsionを持たないとしてよい. よって定理1によって定理2をうる。

$d = 1$とすることにより次の系をうる。

系3

$A \ni 2m$ とする。$(k, m) = 1$ なる各kについて

$$\exists 2n \in A, \quad n \equiv k+1 \pmod{m}.$$

Aの最高のentry 2Mについて系3は次のようになる。

系4.

$(k, M) = 1$, $2 \leq k < M$ なる各kについて $2(k+1) \in A$.

定理A, Bは系4, 系3, 定理2を使うことにより導びかれるが非常に複雑なので省略する.

参考文献

[1] A. Clark, On π_3 of finite dimensional H-spaces. Ann. of Math, 78, (1963), 193-196

[2] J. Ewing, On the type of associative H-spaces. Aarhus univ. Preprint series 1970/71 No. 15